Aufgaben zu den Ableitungsregeln

1.0 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P(2;?) an den Graphen der folgenden Funktionen.

1.1 $f(x) = x^2 - 2x$

1.2 $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2$

1.3 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$

2 Die Funktion p: $y = x^2 + 4x - c$ hat in einem Punkt P eine Tangente mit der Gleichung t: $y = -2x + 2$. Bestimmen Sie den Wert von c und den Punkt P.

3.0 Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Graphen folgender Funktionen waagrechte Tangenten besitzen.

3.1 $f(x) = 3x^2 - 9x + 5$

3.2 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x + 5$

4 Gegeben ist die reelle Funktion f: $x \mapsto x^3 - 9x^2 + 25x - 18$.
Bestimmen Sie, an welcher Stelle die Tangente parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten ist.

5.0 Unter der Normalen eines Graphen im Punkt $(x_0/f(x_0))$ versteht man die Gerade, die in diesem Punkt auf der Tangente senkrecht steht.
Berechnen Sie die Gleichung der Normalen an G_f im Punkt P.

5.1 $f: x \mapsto x^2$; P(2/p)

5.2 $f: x \mapsto x$; P(2/p)

5.3 $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$; $P_1(0/p)$; $P_2(1/q)$

6.0 Gegeben ist die reelle Funktionenschar $f{:}x \mapsto x^3 - ax^2$.

6.1 Bestimmen Sie a so, dass der Graph bei x = 3 eine waagrechte Tangente besitzt.

6.2 Bestimmen Sie a so, dass bei x = –2 die Steigung den Wert –1 hat.

7.0 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. Gegenbeispiel an.

7.1 Die 3. Ableitung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist stets eine lineare Funktion.

7.2 Der Leitkoeffizient hat keinen Einfluss auf das Steigungsverhalten eines Funktionsgraphen.

7.3 Ist der Graph einer ganzrationalen Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse, so gilt dies auch für den Graphen der Ableitungsfunktion.

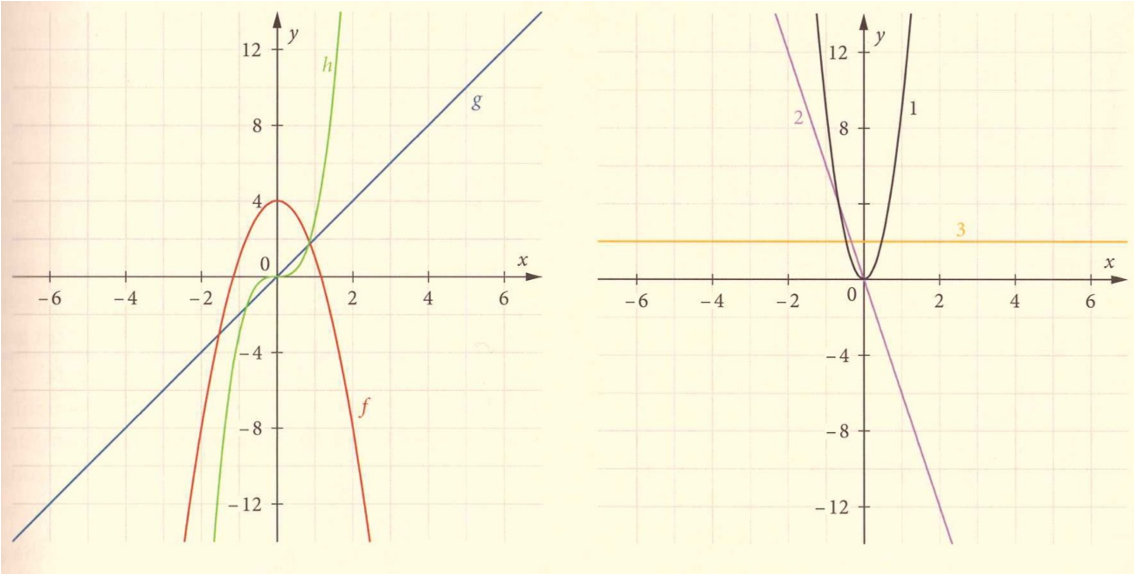
7.4 Hat der Graph einer ganzrationalen Funktion zwei Extrempunkte, so schneidet der Graph der 1. Ableitungsfunktion genau zweimal die x-Achse.

7.5 Hat der Graph der 1. Ableitung einer ganzrationalen Funktion in einem Punkt eine waagrechte Tangente, so hat die 2. Ableitung an der Stelle eine Nullstelle.

7.6 Die n-te Ableitung einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades ist eine konstante Funktion.

8 Beschreiben Sie in Worten, was mit der Gleichung $f'(3) = 4$ ausgesagt wird.

9 Ordnen Sie den jeweiligen Funktionsgraphen aus der linken Abbildung den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion aus der rechten Abbildung zu.



10 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}03x^4 - 0{,}44x^3 + 1{,}44x^2$.

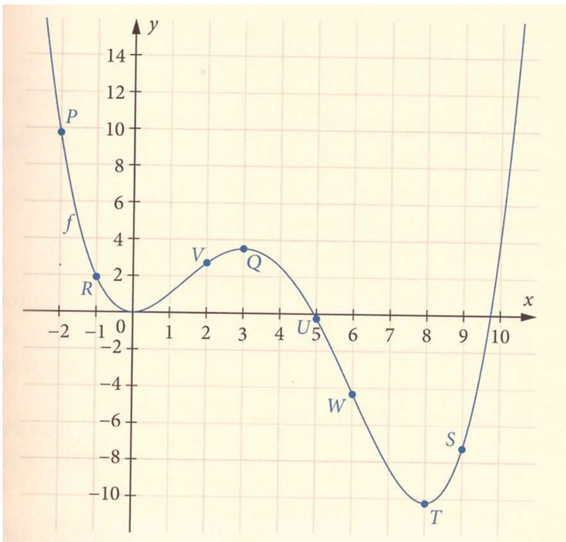
Außerdem sind die Gleichungen von acht Tangenten an den Graphen von f gegeben:

$t_1(x) = -4{,}32x + 21{,}6$ $t_2(x) = 1{,}44x - 0{,}16$ $t_3(x) = -12x - 14{,}24$

$t_4(x) = -4{,}32x - 2{,}41$ $t_5(x) = -10{,}24$ $t_6(x) = 6{,}48x - 65{,}61$

$t_7(x) = 3{,}51$ $t_8(x) = -3{,}6x + 17{,}75$

Ordnen Sie jedem markierten Punkt des Graphen die passende Tangentengleichung zu.



Lösungen

1.1 P(2;0): $y = 2x - 4$

1.2 P(2 ;6,25) : $y = 5x - 3{,}75$

1.3 P(2 ;-5) : $y = -x - 3$

2 Bestimmung der Stelle, an dem der Graph der Funktion f die Steigung m = -2 hat.

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x + 4 \Rightarrow 2x + 4 = -2 \Rightarrow x = -3$$

$$y = -2 \cdot (-3) + 2 = 8 \quad \Rightarrow P(-3/8)$$

Einsetzen von P in p:

$$8 = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - c \quad \Rightarrow 8 = 9 - 12 - c \quad \Rightarrow c = -11$$

3.1 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 6x - 9$ Ansatz: $f'(x) = 0$; $\Rightarrow$ $x = 1{,}5$

3.2 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 2x^2 - 8$ Ansatz: $f'(x) = 0$; $\Rightarrow$ $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

4 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 18x + 25$

Ansatz: $\frac{df(x)}{dx} = 1 \Rightarrow$ $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$

5. Ansatz: $m_{Tangente} \cdot m_{Normale} = -1$

$$m_{Tangente} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) \Rightarrow m_{Normale} = (-1) \cdot \frac{1}{f'(x_0)}$$

5.1 $n_1(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$

5.2 $n_2(x) = -x + 4$

5.3 P_1: $n_3(x) = -\frac{1}{2}x$ P_2 : $n_4(x) = x - 1$

6. $\frac{df(x)}{dx} = f(x) = 3x^2 - 2ax$

6.1 Ansatz: $f'(3) = 0 \Rightarrow a = 4{,}5$

6.2 Ansatz: $f'(-2) = -1 \Rightarrow a = -3{,}25$

7.1 Wahre Aussage.

Beispiel:

$f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 2x + 6$

$f'(x) = -8x^3 + 9x^2 - 2$

$f''(x) = -24x^2 + 18x$

$f'''(x) = -48x + 18$

7.2 Falsche Aussage.

Gegenbeispiel:

$f(x) = 3x^2 + 5x - 7 \qquad f'(x) = 6x + 5 \qquad f'(1) = 11$

$f(x) = x^2 + 5x - 7 \qquad f'(x) = 2x + 5 \qquad f'(1) = 7$

7.3 Falsche Aussage.

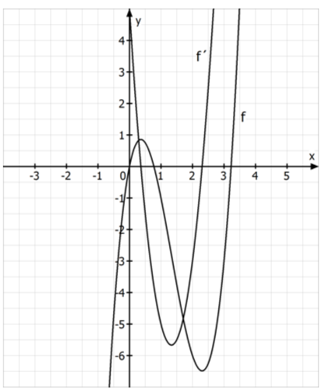
Gegenbeispiel:

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 7$

$f'(x) = 8x^3 + 6x$ nicht achsensymmetrisch zur y-Achse

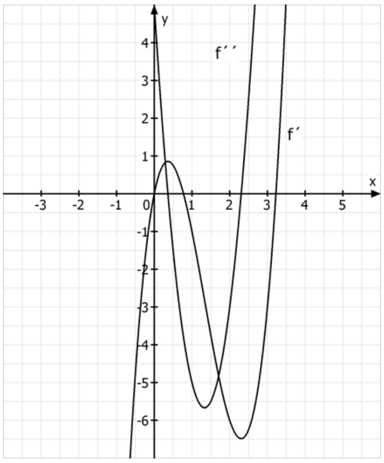
7.4 Richtige Aussage.

Beispiel:



7.5 Richtige Aussage.

Beispiel:



7.6 Richtige Aussage.

Beispiel:

$$f(x) = x^n + 7x - 5$$
$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} + 7$$
$$f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$
$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot 1 \cdot x^0 = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot 1$$

8 Die Gleichung bedeutet, dass die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x = 3 die Steigung 4 hat.

9 $f \Rightarrow 2 \quad g \Rightarrow 3 \quad h \Rightarrow 1$

10

$P \Rightarrow t_3 \quad R \Rightarrow t_4 \quad V \Rightarrow t_2 \quad Q \Rightarrow t_7$

$U \Rightarrow t_8 \quad W \Rightarrow t_1 \quad T \Rightarrow t_5 \quad S \Rightarrow t_6$